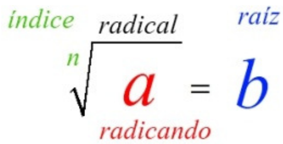
RADICALES

¿Qué es una raíz de índice n?

Una raíz de índice n es una operación matemática que se define de la siguiente forma:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n}$$

Esto se lee como: "la raíz enésima de un numero a es b, si y solo si, b elevado a n es igual a ".



Así, a n se le denomina índice de la raíz, al número del interior de la raíz es el radicando, al símbolo, radical y al resultado, raíz n-esima.

Cuando no se pone índice se entiende que el índice por defecto es el 2, es decir, a falta de índice, las raíces son raíces cuadradas.

Importante: Se aprecia como el resultado de la raíz n-esima es b, es decir, es la base de una potencia. Así, una **raíz** calcula una **base** de una potencia.

Ejemplo: Calcular $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{64}$ y $\sqrt[5]{1024}$:

a) $\sqrt{81} = \sqrt[2]{3^4} = 3^2 = 9$

b) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

c) $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

Operaciones con raíces

Suma y resta de raíces

Para sumar o restar raíces, estas deben tener el **mismo índice y el mismo radicando**:

$$p \cdot \sqrt[n]{a} + q \cdot \sqrt[n]{a} = \left(p+q\right) \cdot \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo: Suma los siguientes radicales:

d) $5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

e) $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{5} - \dfrac{\sqrt[3]{2}}{4} - \sqrt[3]{2} = \dfrac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{2} - \dfrac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{4} - 1\right) \cdot \sqrt[3]{2} = -\dfrac{13}{20}\sqrt[3]{2}$

Producto de raíces

Para multiplicar raíces, estas deben tener el **mismo índice**:

$$\boxed{p \cdot \sqrt[n]{a} \cdot q \cdot \sqrt[n]{b} = p \cdot q \cdot \sqrt[n]{a \cdot b}}$$

Ejemplo: Multiplica los siguientes radicales:

f) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{20}$

g) $3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot 5\cdot\sqrt[3]{5}=15\cdot\sqrt[3]{10}$

Cociente de raíces

Para dividir raíces, estas deben tener el **mismo índice**:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

Ejemplo: Divide los siguientes radicales:

h) $\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

i) $\sqrt{15}:\sqrt{12}=\sqrt{\frac{15}{12}}=\sqrt{\frac{5}{4}}$

Introducción de factores en un radical

Para introducir factores en un radical, se multiplica el exponente del número que se desea introducir por el índice de la raíz en la que queremos introducirlos:

$$b^m\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a\cdot b^{m\cdot n}}$$

Si tenemos más de un factor, los introduciremos uno a uno.

Ejemplo: Introducir todos los factores en los radicales $2\cdot\sqrt[3]{3}$ y $5^2\cdot\sqrt[4]{7^3}$.

a) $2\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\cdot 2^{3\cdot 1}}=\sqrt[3]{3\cdot 2^3}$

b) $5^2\cdot\sqrt[4]{7^3}=\sqrt[4]{7^3\cdot 5^{2\cdot 4}}=\sqrt[4]{7^3\cdot 5^8}$

Extracción de factores de un radical

Para extraer factores en un radical, tenemos que hacer el procedimiento contrario a la introducción. En este caso, se divide el exponente del número a extraer entre el índice de la raíz, el resto de la división serán las veces que dicho factor queda dentro:

$$\sqrt[n]{a\cdot b^n}=b\cdot\sqrt[n]{a}$$

Ejemplo: Extraer todos los factores $\sqrt{2^7}$.

Para ello, dividimos el exponente de la potencia entre el índice de la raíz. En este caso, al no poner índice, es 2.

Dividimos el exponente entre el índice:

$$\underbrace{7}^{\text{exponente}} \;\; \boxed{\underbrace{2}^{\text{indice}}} \qquad \underbrace{1}_{\text{queda dentro}} \;\; \underbrace{3}_{\text{sale}}$$

Así, tendremos:

$$\sqrt{2^7} = \underbrace{2^3}_{\text{sale}} \cdot \underbrace{\sqrt{2^1}}_{\text{queda dentro}} = \boxed{8\sqrt{2}}$$

En el caso de tener un número compuesto, descomponerlo en factores primos y sacar todos los factores posibles de la raíz.

Ejemplo: Extraer todos los factores de los radicales $\sqrt[3]{3^4 \cdot 5^3}$, $\sqrt[4]{5^8 \cdot 7^{13}}$ y $\sqrt[5]{6220800}$.

a) $\sqrt[3]{3^4 \cdot 5^3} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[4]{5^8 \cdot 7^{13}} = 5^2 \cdot 7^3 \cdot \sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[5]{6220800} = \sqrt[5]{2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[5]{5^2}$

¿Cómo se suman o restan radicales con distinto radicando?

Para sumar radicales con distinto radicando, debemos intentar ponerlos todos con el mismo radicando. Para ello se siguen los siguientes pasos:

1. Factorizar el radicando de todos los radicales.
2. Extraer todo lo posible.
3. Operar y simplificar, cuando se pueda.
4. Realizar las sumas o restas, según corresponda.

Ejemplo: Calcula $4\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + \sqrt{32}$:

$$4\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + \sqrt{32} =$$
$$= 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 3^2} - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^5} = (\text{Paso 1})$$
$$= 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + 2^2 \cdot \sqrt{2} = (\text{Paso 2})$$
$$= 12 \cdot \sqrt{2} - 10 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} = (\text{Paso 3})$$
$$= \boxed{6 \cdot \sqrt{2}} \; (\text{Paso 4})$$

Operaciones combinadas

En las operaciones combinadas se sigue la jerarquía de las operaciones:

1. Paréntesis y corchetes.
2. Potencias y raíces.
3. Multiplicaciones y divisiones.
4. Sumas y restas.

Si queremos realizar una multiplicación en la que aparecen paréntesis, usaremos la propiedad distributiva:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Cuando tengamos más de paréntesis con sumandos, aplicaremos la propiedad varias veces:

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot (c+d) + b \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Ejemplo: Calcula $\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)$:

Aplicaremos la propiedad distributiva para realizar la multiplicación:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)=$$
$$=1\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)=$$
$$=1\cdot 1-1\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=$$
$$=1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{9}=$$
$$=1-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{3^2}=$$
$$=1-3=\boxed{-2}$$

ACTIVIDADES

1. Extraer todo lo posible, dejando el radical lo más simplificado posible:
   - a) $\sqrt{3^7}$
   - b) $\sqrt{2^5 \cdot 3}$
   - c) $\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^6}$
   - d) $\sqrt[5]{3^{12} \cdot 5^8 \cdot 7^2}$
   - e) $\sqrt{\dfrac{3^5}{2^8}}$
   - f) $\sqrt{3^3 \cdot \dfrac{5^7}{7^2}}$
   - g) $\sqrt{450}$
   - h) $\sqrt[3]{600}$
   - i) $\sqrt{2400}$
   - j) $\sqrt{19845}$
   - k) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$
   - l) $\sqrt{\dfrac{27}{125}}$
   - m) $\sqrt{\dfrac{98}{81}}$

2. Introducir en los radicales y simplificar:
   - a) $3 \cdot \sqrt{5}$
   - b) $2^2 \cdot \sqrt{5}$
   - c) $2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$
   - d) $2^4 \cdot 3^3 \cdot \sqrt{2 \cdot 3}$
   - e) $2 \ \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}$
   - f) $2 \ \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}$
   - g) $2 \ \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}$
   - h) $\dfrac{3^3 \cdot 5}{2^2} \cdot \sqrt{2^4 \cdot 3^3}$
   - i) $\dfrac{3^3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{\dfrac{2^6 \cdot 3}{3^5 \cdot 5}}$

3. Realiza las siguientes sumas y restas con radicales:
   - a) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{18} - 4\sqrt{50}$
   - b) $4\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + \sqrt{32}$
   - c) $\sqrt{45} + 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + \sqrt{175} - \sqrt{63}$
   - d) $\sqrt[3]{8} - 7 \cdot \sqrt[3]{54} + 3 \cdot \sqrt[3]{250}$
   - e) $2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{9}$
   - f) $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{128}$
   - g) $\dfrac{\sqrt{24}}{3} - \dfrac{\sqrt{54}}{5} + 2\sqrt{600} - \sqrt{6}$
   - h) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{27}}{5} - \dfrac{\sqrt{12}}{6}$

4. Realiza las siguientes operaciones combinadas:
   - a) $3 \cdot \left(\sqrt{450} - \sqrt[3]{192}\right) - 4 \cdot \left(\sqrt[3]{375} - \sqrt{98}\right)$
   - b) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$
   - c) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)^2$
   - d) $\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right) + 5 - 2\sqrt{2}$
   - e) $\left(5\sqrt{3} + 7\sqrt{8}\right) \cdot \left(\sqrt{2} - 3\sqrt{27}\right)$
   - f) $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$
   - g) $\left(1 - \sqrt{3}\right)^3$