

Página 207

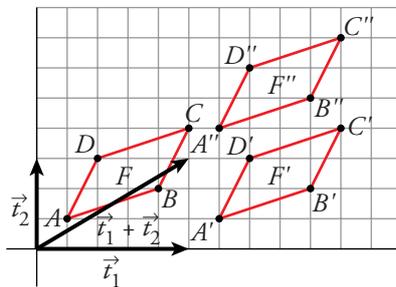
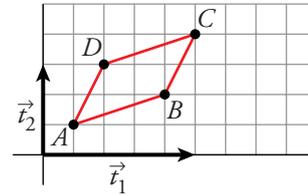
PRACTICA

1 Reproduce sobre papel cuadrulado el paralelogramo $F(A, B, C, D)$.

a) Somételo a una traslación de vector \vec{t}_1 .

b) Traslada la figura obtenida, F' , mediante \vec{t}_2 .

c) Determina el vector \vec{t} de una traslación que transforme directamente F en F'' .



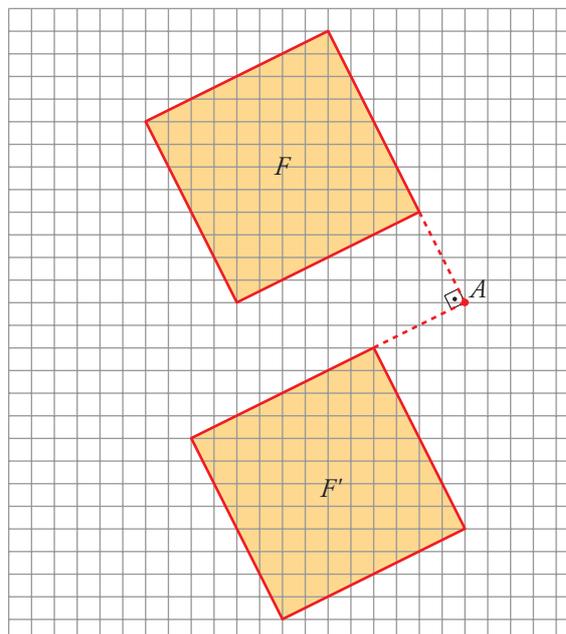
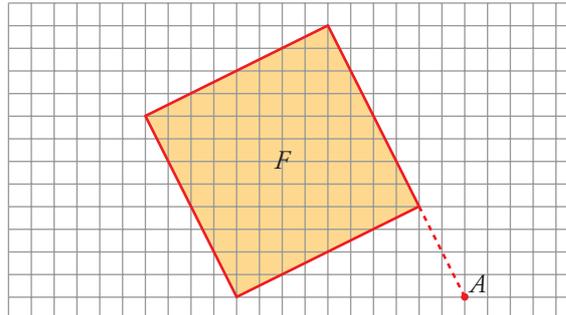
$$T_1(F) = F' ; T_2(F') = F''$$

$$T_2 \circ T_1(F) = F''$$

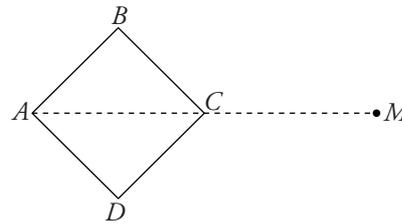
- La traslación que transforma directamente F en F'' es la de vector $\vec{t} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$.

2 Copia esta figura sobre una cuadrícula.

Dibuja su transformada según un giro de 90° alrededor del punto A y en sentido contrario a las agujas del reloj.

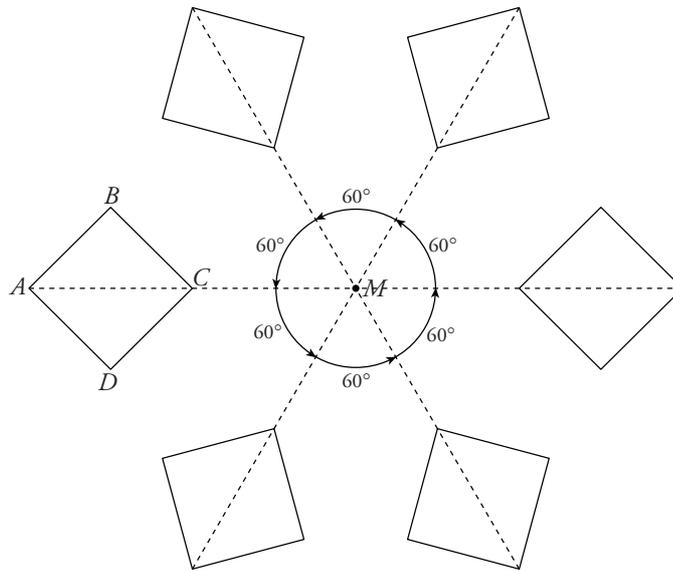


- 3 Dibuja un cuadrado $ABCD$ de 3 cm de lado. Prolonga la diagonal AC hasta el punto M , tal que $\overline{AM} = 2\overline{AC}$ (la distancia de A a M debe ser dos veces la de A a C).

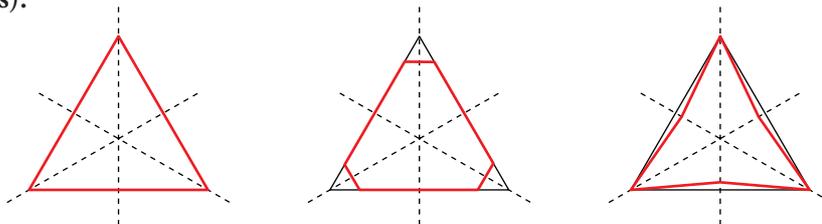


Dibuja la imagen del cuadrado en distintos giros, alrededor de M , de ángulos 60° , 120° , 180° , 240° y 300° .

• En un arco de 60° , la cuerda es igual al radio.



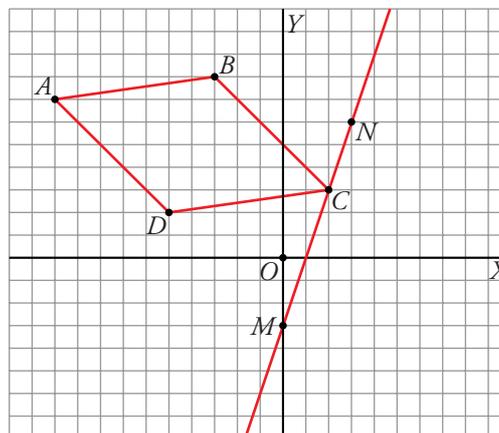
- 4 Dibuja un polígono con tres ejes de simetría. (Intenta encontrar varias soluciones).

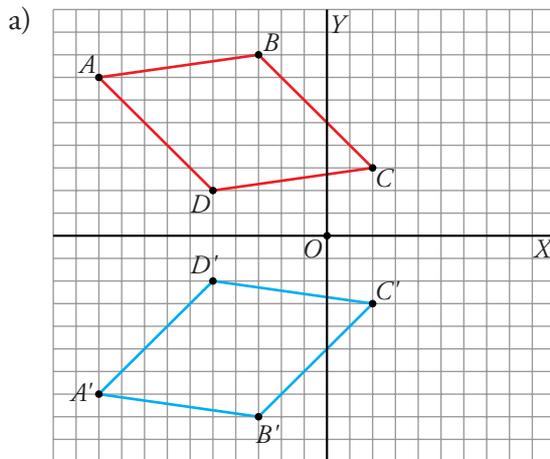


- 5 Los puntos $A(-10, 7)$, $B(-3, 8)$, $C(2, 3)$ y $D(-5, 2)$ son los vértices de un rombo.

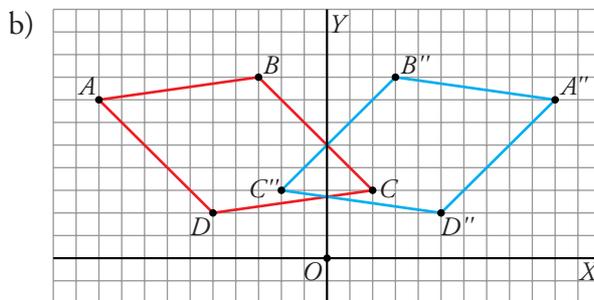
Calcula las coordenadas de los vértices del rombo transformado mediante:

- La simetría de eje OX .
- La simetría de eje OY .
- La simetría que tiene por eje la recta que pasa por los puntos $M(0, -3)$ y $N(3, 6)$.

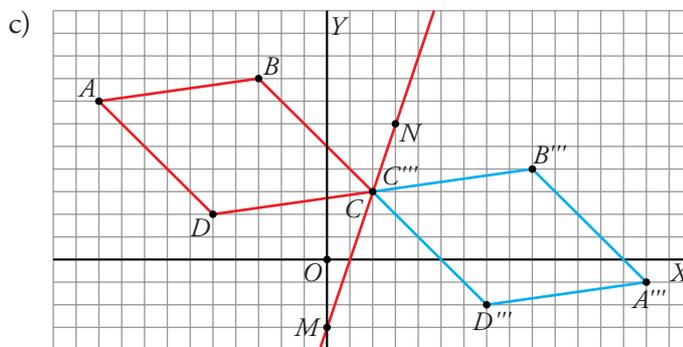




$$\begin{array}{ll} A(-10, 7) & A'(-10, -7) \\ B(-3, 8) & B'(-3, -8) \\ C(2, 3) & C'(2, -3) \\ D(-5, 2) & D'(-5, -2) \end{array}$$

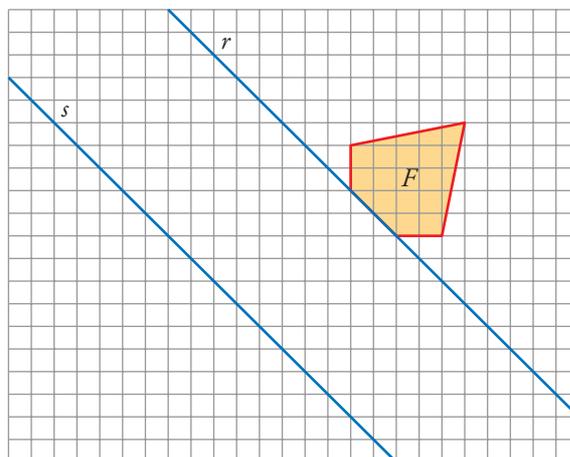


$$\begin{array}{l} A''(10, 7) \\ B''(3, 8) \\ C''(-2, 3) \\ D''(5, 2) \end{array}$$

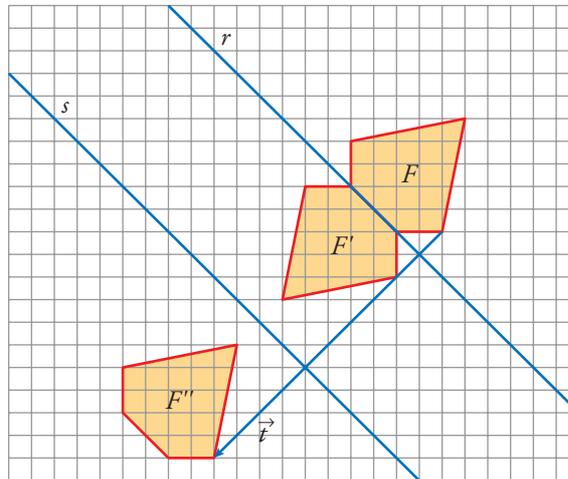


$$\begin{array}{l} A'''(14, -1) \\ B'''(9, 4) \\ C'''(2, 3) \\ D'''(7, -2) \end{array}$$

- 6 Dibuja la imagen del pentágono, F , al aplicarle sucesivamente las simetrías de ejes r y s .

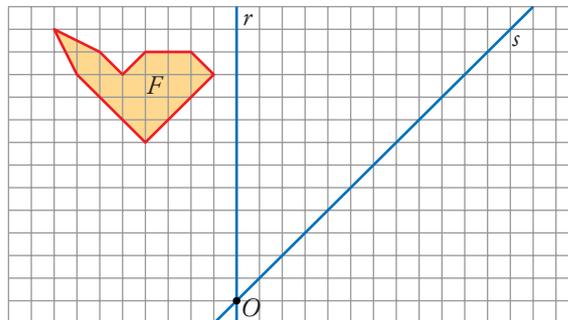


Dibuja también el vector \vec{t} de la traslación equivalente a la composición de dichas simetrías.



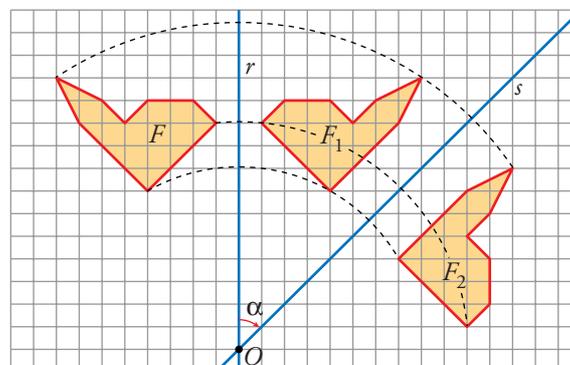
Página 208

- 7 a) Dibuja la imagen F_1 , transformada de la figura F , por la simetría de eje r .
- b) Dibuja la imagen F_2 , transformada de F_1 mediante la simetría de eje s .
- c) Define el giro equivalente a la composición de ambas simetrías.



- d) Define también el giro equivalente a la composición de ambas simetrías en orden inverso.

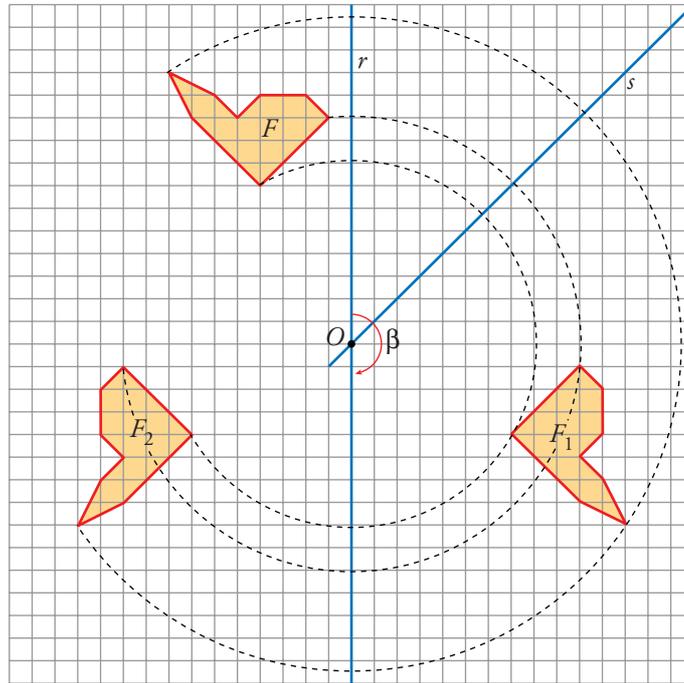
- a) y b)



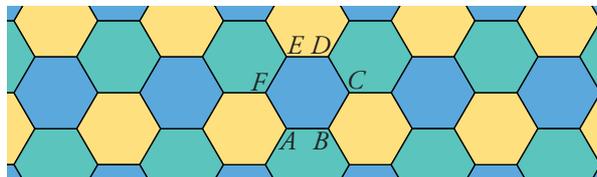
- c) Es un giro de centro O , corte de r con s , y ángulo 2α , doble del ángulo que forman las rectas r y s .

- d) Al aplicar primero la simetría según el eje s y después según el eje r , se obtiene:

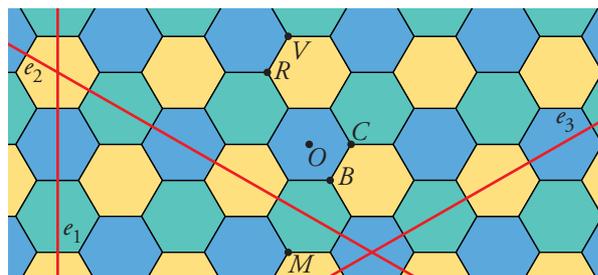
Corresponde a un giro de centro O y ángulo 2β .



- 8 Este mosaico está formado por infinitos hexágonos regulares.

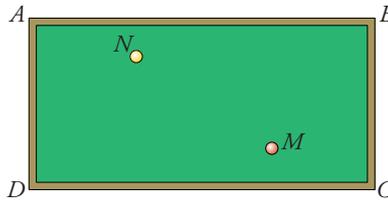


- Define tres traslaciones de vectores no paralelos para las cuales el mosaico sea invariante.
- Define tres giros de distintos ángulos que lo transformen en sí mismo.
- Busca tres ejes de simetría del mosaico.
 - \vec{MV} , \vec{BR} y \vec{MC} .
 - Giro de centro O y amplitud 120° , 240° y 360° .
 - e_1 , e_2 y e_3 .

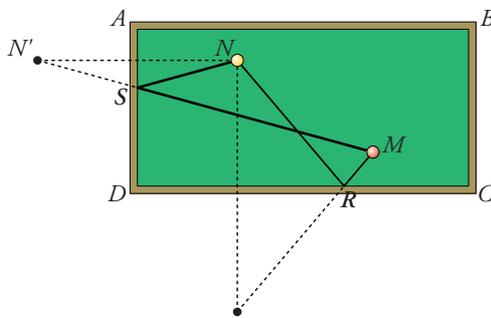


PIENSA Y RESUELVE

- 9 M y N son dos bolas de billar. Busca el punto en que M debe golpear la banda DC para chocar después con la bola N .



Busca también el punto de la banda AD hacia el que habría que lanzar M para chocar con N .



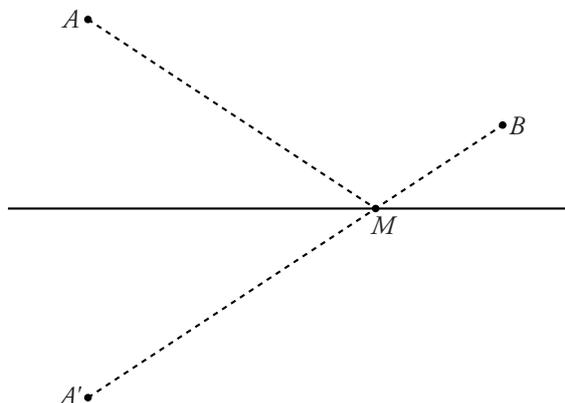
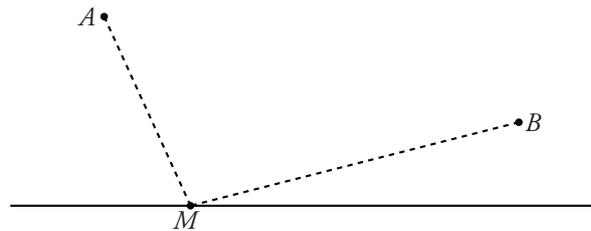
Buscamos el simétrico de N respecto a la banda DC , N' , y unimos N' con M .

El punto de corte de DC con $N'M$ es el buscado, R .

Se actúa de forma análoga con la banda AD . Se obtiene S .

- 10 Dos pueblos, A y B , están situados al mismo lado de una autopista.

Busca el trazado más corto para un tramo de carretera que los una entre sí y con la autopista.

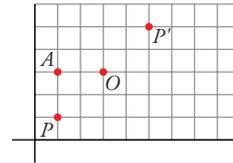


Si hallamos, por ejemplo, el simétrico del pueblo A respecto a la autopista, A' , estará a la misma distancia de la autopista que A .

El camino más corto entre A' y B es el tramo de recta que los une. La intersección de este tramo con la autopista es el punto que buscamos, M .

11 Observa la cuadrícula.

Un giro de 180° alrededor de $O(3, 3)$ transforma el punto $P(1, 1)$ en $P'(5, 5)$.



a) Identifica otros tres movimientos que transformen P en P' .

b) ¿Cuál es la imagen de $A(1, 3)$ en cada uno de ellos?

a) Una traslación de vector \vec{PP}' .

Una simetría cuyo eje sea la mediatriz de PP' .

Un giro de centro en el punto $(1, 5)$ y un ángulo de 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

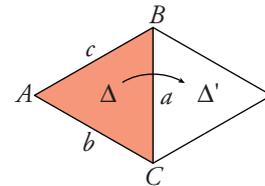
b) La traslación de vector \vec{PP}' transforma $A(1, 3)$ en $A'(5, 7)$.

La simetría mencionada transforma $A(1, 3)$ en $A'(3, 5)$.

El giro transforma $A(1, 3)$ en $A'(3, 5)$.

12 El triángulo equilátero Δ se puede transformar en Δ' mediante tres movimientos distintos.

a) Determina cada uno de los tres movimientos que transforman Δ en Δ' y designa en cada caso los vértices y los lados de Δ' teniendo en cuenta de qué vértices de Δ provienen.

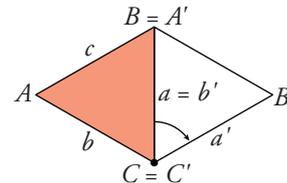


Por ejemplo:

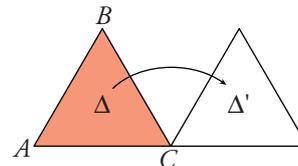
Un giro de centro C y ángulo -60° transforma:

$$A \rightarrow B = A'$$

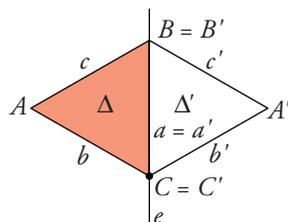
$$B \rightarrow B' \text{ y } C \text{ en sí mismo } (C = C')$$



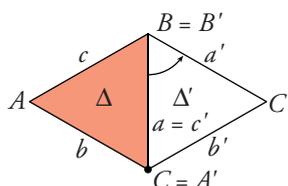
b) Encuentra una traslación, un giro y una simetría que transformen Δ en Δ' . Nombra, en cada caso, los vértices de Δ' .



a)

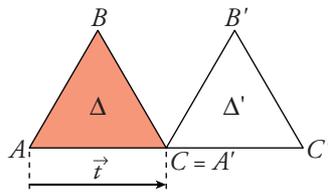
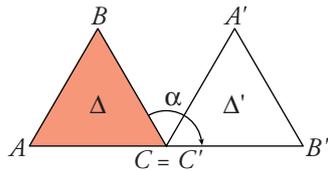
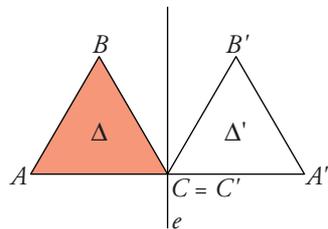


Simetría de eje e (recta BC).



Giro de centro B y ángulo 60° .

b)

Traslación de vector $\vec{t} = \vec{AC}$.Giro de centro C y ángulo $\alpha = 120^\circ$.Simetría de eje e .**Página 209****REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA**

13 Si consideramos como transformación el que *todo quede como estaba y donde estaba*, a dicha transformación la llamaremos identidad (I).

Define una traslación y un giro que sean equivalentes a la identidad.

- Traslación de vector $\vec{0}$.
- Giro de ángulo 0° , 360° ... (con cualquier centro).

14 Se dice que una transformación es idempotente si compuesta consigo misma da lugar a la identidad (es decir, si la aplicamos dos veces, todo queda como estaba: $T \circ T = I$).

Encuentra dos movimientos que sean idempotentes.

Por ejemplo, una simetría de un cierto eje e , y un giro de 180° (con cualquier centro).

15 Se dice que una transformación T' es inversa de otra T cuando compuesta con ella da lugar a la identidad (es decir, si aplicamos T y después T' , todo vuelve a donde estaba).

Encuentra la transformación inversa en cada uno de los siguientes casos:

- Una traslación de vector $\vec{v}(7, -4)$.
- Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 60^\circ$.
- Una simetría de eje la recta $y = x$.

- a) Una traslación de vector $\vec{t}'(-7, 4)$.
- b) Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha' = -60^\circ$.
- c) Es inversa de sí misma: una simetría de eje la recta $y = x$.

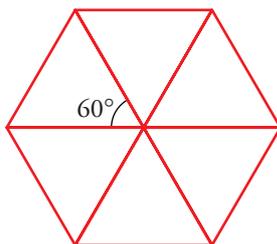
16 La composición de transformaciones no cumple la propiedad conmutativa (es decir, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$, en general, es distinto que $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$). Sin embargo, si las transformaciones son de ciertos tipos, sí se cumple la propiedad conmutativa.

Justifica en cuáles de los siguientes casos es así y en cuáles no:

- a) Composición de dos traslaciones.
 - b) Composición de dos giros del mismo centro.
 - c) Composición de dos simetrías axiales.
 - d) Composición de una traslación y un giro.
- a) Sí es conmutativa. El resultado es otra traslación de vector igual al vector suma de los correspondientes a las dos traslaciones.
 - b) Sí es conmutativa. El resultado es otro giro del mismo centro y ángulo igual a la suma de los ángulos correspondientes a los dos giros.
 - c) No es conmutativa.
 - d) No es conmutativa.

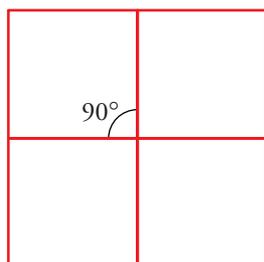
17 Justifica que solo se puede hacer un mosaico regular con triángulos, cuadrados o hexágonos. Para ello ten en cuenta cuánto deben sumar los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice de un mosaico y cuánto vale el ángulo de cada uno de los polígonos regulares.

- Seis triángulos equiláteros encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360° :



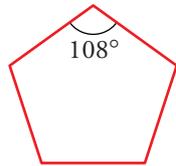
$$60^\circ \cdot 6 = 360^\circ$$

- Cuatro cuadrados encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360° :



$$90^\circ \cdot 4 = 360^\circ$$

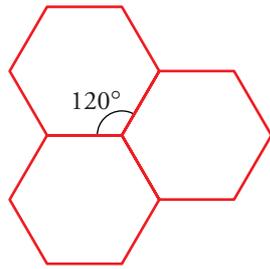
- No podemos encajar los pentágonos regulares:



$$180^\circ \cdot 3 = 324^\circ \rightarrow \text{Con tres pentágonos no llega a } 360^\circ.$$

$$180^\circ \cdot 4 = 432^\circ \rightarrow \text{Con cuatro pentágonos pasamos de } 360^\circ.$$

- Tres hexágonos regulares encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360° :



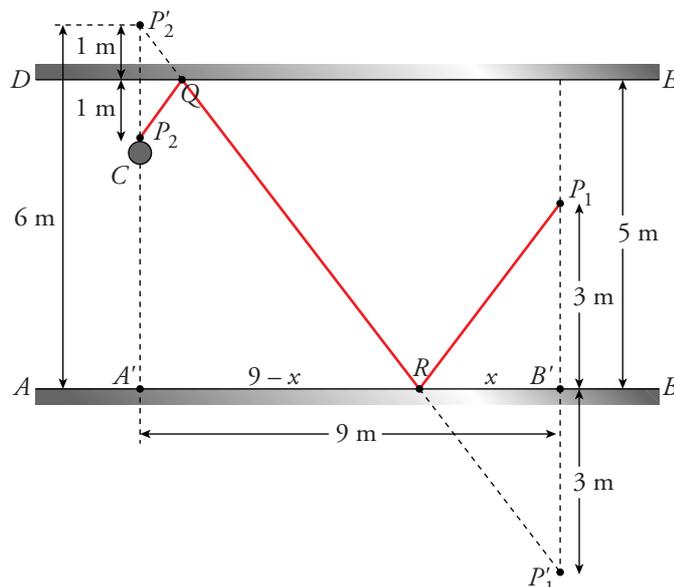
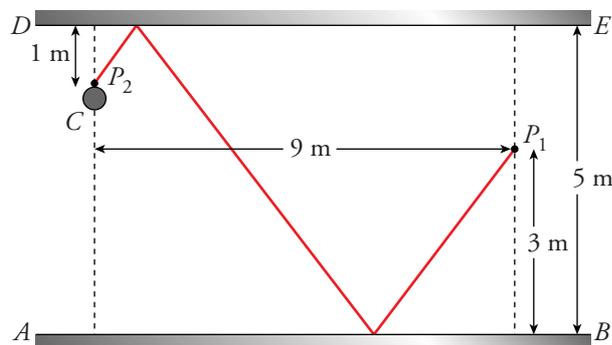
$$120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$$

- Al considerar tres polígonos de más de 6 lados, la suma de los tres ángulos correspondientes es mayor de 360° ; luego no se pueden encajar en el plano.

PROFUNDIZA

- 18** Dos personas, P_1 y P_2 , se encuentran en un pasillo de espejos.

Teniendo en cuenta la columna C , halla la distancia a la que P_1 cree ver a P_2 cuando P_1 mira hacia el espejo AB .



P'_1 es el simétrico de P_1 respecto al espejo AB .

P'_2 es el simétrico de P_2 respecto al espejo DE .

P_1 ve reflejado en AB a P_2 en el punto R . Hemos de calcular las distancias de P_1 a R , de R a Q y de Q a P_2 .

Los triángulos AP'_2R y $B'RP_1$ son semejantes. Por tanto:

$$\frac{6}{3} = \frac{9-x}{x} \rightarrow 6x = 27 - 3x \rightarrow 9x = 27 \rightarrow x = 3 \text{ m}$$

$$\overline{P_1R} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\overline{RP'_2} = \overline{RQ} + \overline{QP_2}$$

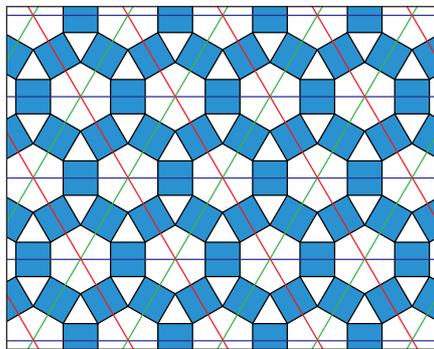
$\overline{RP'_2}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 6 m y 6 m.

$$\overline{RP'_2} = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

La distancia a la que P_1 cree ver a P_2 es $3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \text{ m}$.

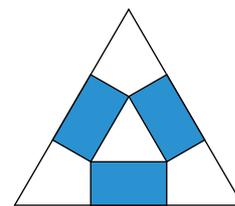
- 19** Se llama motivo mínimo de un mosaico a una pieza teórica, lo más pequeña posible, repitiendo la cual se puede reproducir todo el mosaico. Los bordes de esta pieza “no se notan” salvo que los hayamos pintado expresamente.

Por ejemplo, si en el siguiente mosaico trazamos ejes de simetría con ángulos de 60° :

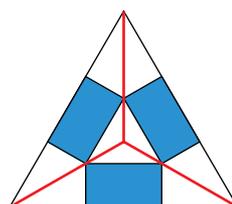
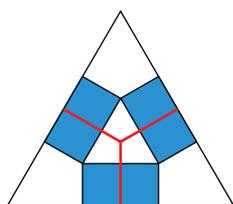


descubrimos esta pieza como candidata a “motivo mínimo”.

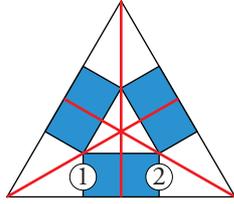
- Redúcela a la tercera parte de dos formas distintas.
- ¿Puedes hacerla aún más pequeña?
- Descubre otro “motivo mínimo” trazando ejes de simetría perpendiculares.



a)

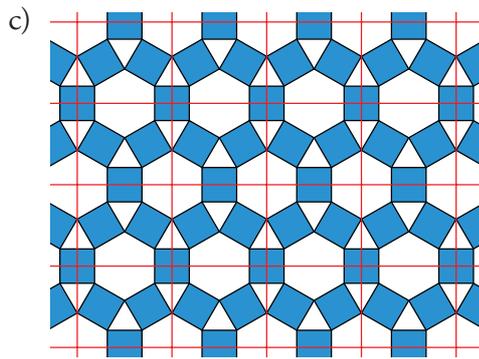


b) *No*. Observa que, si lo dividimos de esta forma:



la pieza ① y la ② son simétricas, pero *no* podemos obtener una a partir de la otra solo con giros y traslaciones.

Por tanto, esta división no es válida.



Otro “motivo mínimo” es el siguiente:

